А. А. ШАЛДАНБАЕВ, А. Ш. ШАЛДАНБАЕВ, И. О. ОРАЗОВ

(Южно-Казахстанский государственный университет им. М. Ауезова, Шымкент, Республика Казахстан)

СПЕКТРАЛЬНЫЕ РАЗЛОЖЕНИЯ ОДНОГО КЛАССА ВОЛЬТЕРРОВЫХ ОПЕРАТОРОВ ШТУРМА-ЛИУВИЛЛЯ

Аннотация. В данной работе получено спектральное разложение вольтеррова оператора Штурма–Лиу-вилля в пространстве Крейна.

Ключевые слова: спектр, разложение, задача, пространство, число.

Тірек сөздер: спектр, таралым, есеп, кеңістік, сан.

Keywords: spectrum, decomposition, task, space, number.

Рассмотрим в пространстве $H = L^2(0,1)$ краевую задачу Штурма-Лиувилля

$$Ly = -y''(x) = \lambda y(x);\ \ x \in (0,1) \qquad (1)$$

(1)

$$U_i[y] = a_{i1}y(0) + a_{i2}y'(0) + a_{i3}y(1) + a_{i4}y'(1) = 0\ \ (i = 1,2) \qquad (2)$$

(2)

с двумя ($i = 1,2$) линейно независимыми граничными условиями (2), где a_{ij}($i = 1,2$; $j = 1,2,3,4$) – про-извольные комплексные числа, λ – спектральный параметр. Линейная независимость граничных условий ($i = 1,2$) имеет место тогда и только тогда, когда хотя бы один из миноров

$$\Delta_{ij} = a_{1i}a_{2j} - a_{1j} \times a_{2i} \quad (i,j = 1,2,3,4) \qquad (3)$$

(3)

граничной матрицы

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23}a_{24} \end{pmatrix},$$

отличен от нуля.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Оператор Штурма-Лиувилля (1)-(2) называется вольтерровой, если он не имеет собственных значений на всей конечной части комплексной z плоскости C.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. Получить «спектральное» разложение вольтеррова оператора Штур-ма–Лиувилля в пространстве с индефинитной метрикой, порожденной скалярным произведением $[u,v] = (Su,v)$, где $Su(x) = u(1-x)$, $(.,.)$– скалярное произведение пространства H.

2. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ ПРЕДЛОЖЕНИЯ

ЛЕММА 1. Если оператор Штурма–Лиувилля (1)-(2) вольтерров, то он подобен оператору Коши

$$Cz = -z''(x),\ x \in (0,1)(4) \tag{4}$$

$$z(0) = 0,\ z'(0) = 0, \tag{5}$$

где оператор подобия имеет вид

$$z(x) = Ty(x) = (I - kS)y(x),\ k^2 \neq 1 \tag{6}$$

$$Sy(x) = y(1-x), \tag{7}$$

I – тождественный оператор, т.е.

$$L = T^{-1}CT \tag{8}$$

ЛЕММА 2. Оператор SC является самосопряженным оператором в пространстве H. Обратный оператор $(SC)^{-1}$ является самосопряженным и вполне непрерывным оператором а пространстве $L^2(0,1)$, поэтому имеет место спектральное разложение

$$(SC)^{-1}f = C^{-1}Sf = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(f,\varphi_n)}{\lambda_n}\varphi_n; \qquad (9)$$

(9)

$$SCg = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n(g,\varphi_n) \times \varphi_n, \qquad (10)$$

(10)

где $\quad SC\varphi_n = \lambda_n\varphi_n, n = 1,2,\ldots..;\ (\varphi_n,\varphi_m) = \delta_{nm.}$

Эта лемма играет в дальнейшем существенную роль и является следствием теоремы Гилберта-Шмидта [1., с. 231].

3. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

ТЕОРЕМА 1. Если $k^2 \neq 1$, то оператор Штурма-Лиувилля

$$Ly = -y''(x);\ \ x \in (0,1)(1)$$

$$y(0) = ky(1),\ y'(0) = -ky'(1) \qquad (2)$$

(2)

вольтерров и для него имеет место спектральные разложения

$$L^{-1}f = \sum_{n=1}^{\infty} (f, S\,T^*\varphi_n)T^{-1}\varphi_n,$$

$$Lg=\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n(g,T^*\varphi_n)\;ST^{-1}\varphi_n,$$

где $\{\varphi_n\}$ – ортонормированные собственные векторы оператора SC, соответствующие собственным значениям λ_n, т.е. $SC\varphi_n=\lambda_n\varphi_n,\ (\varphi_n,\varphi_m)=\delta_{nm}$; C – оператор Коши, оператор S определен формулой (7), $T=I-KS$ – оператор подобия, f и g произвольные элементы пространства H.

Системы $\{ST^*\varphi_n\}$ и $\{ST^{-1}\varphi_n\}$ образуют биортогональную пару в пространстве Крейна [2] со скалярным произведением

$$[u,v]=(Su,v),$$

где (.,.) – скалярное произведение пространства H.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу леммы (1) имеет место формула (8) $L=T^{-1}CT$, где $I-kS$, C – оператор Коши. Несложно заметить, что операторы S и T коммутируют. В самом деле

$$ST=S-kS^2=S-kI;TS=(I-kS)S=S-kS^2=S-kI.$$

т.е. $ST=TS$, $\Rightarrow T^{-1}S=ST^{-1}$, где T^{-1} оператор обратный к оператору T, оно существует при $k^2\neq 1$. Действуя оператором S, слева на формулу

$$L=T^{-1}CT,$$

имеем

$$SL=ST^{-1}CT=T^{-1}SCT.$$

В силу леммы (2) оператор SC самосопряжен и его собственные функции $\{\varphi_n\}$ полны и ортого-нальны в пространстве H, т.е. имеют место формулы

$$SC\varphi_n=\lambda_n\varphi_n,\qquad(\varphi_n,\varphi_m)=\delta_{nm},$$

$$f=\sum_{n=1}^{\infty}(f,\varphi_n)\times\varphi_n.$$

$$SCf=\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n(f,\varphi_n)\varphi_n\quad;\rightarrow$$

Заменив в этом формуле f на Tg имеем

$$SCTg=\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n(Tg,\varphi_n)\varphi_n=\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n(g,T^*\varphi_n)\varphi_n,\rightarrow$$

$$SLg=\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n(g,T^*\varphi_n)T^{-1}\varphi_n,\qquad\rightarrow$$

$$Lg = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n (g, T^* \varphi_n) S T^{-1} \varphi_n.$$

Далее, из формулы $SL = T^{-1}SCT$ имеем $(SL)^{-1} = T^{-1}(SL)^{-1}T$.

В силу той же леммы (2) имеем

$$(SC)^{-1} g = L^{-1} S g = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(g, \varphi_n)}{\lambda_n} \varphi_{n.}$$

Заменив в этой формуле g на Tf, имеем

$$(SC)^{-1} T f = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(Tf, \varphi_n)}{\lambda_n} \varphi_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(f, T^* \varphi_n)}{\lambda_n} \varphi_n;$$

следовательно

$$(SL)^{-1} f = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(f, T^* \varphi_n)}{\lambda_n} T^{-1} \varphi_n.$$

Преобразуем левую часть этой формулы

$$L^{-1} S f = \sum_{n=1}^{\infty} (f, T^* \varphi_n) T^{-1} \varphi_n.$$

Заменив f на Sf, получим

$$L^{-1} f = \sum_{n=1}^{\infty} (Sf, T^* \varphi_n) T^{-1} \varphi_n = \sum_{n=1}^{\infty} (f, S T^* \varphi_n) T^{-1} \varphi_n.$$

Пусть $[u, v] = (Su, v)$, тогда

$$[T^* \varphi_n, S T^{-1} \varphi_m] = (S T^* \varphi_n, S T^{-1} \varphi_m) = (T^* \varphi_n, T^{-1} \varphi_m) = (\varphi_n, \varphi_m) = \delta_{nm};$$

$$[S T^* \varphi_n, T^{-1} \varphi_m] = (T^* \varphi_n, T^{-1} \varphi_m) = (\varphi_n, \varphi_m) = \delta_{nm}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1 Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. – М.: Наука, 1976. – 544 с.

2 Пятков С.Г., Егоров И.Е., Попов С.В. Неклассические дифференциально-операторные уравнения. – Новосибирск: Наука, 2000. – 336 с.

REFERENCES

1 Kolmogorov A.N., Fomin S.V. Elementy teorii funkcii I funkcional’nogo analiza. – M.: Nauka, 1976. – 544 (in Russ.).

2 Pyatovskii S.G., Egorov I.E., Popov S.V. Neklassicheskie differencial’no-operatornye uravneniya. – Novosibirsk: Nauka, 2000. – 336 s. (in Russ.).

Резюме

А. А. ШАЛДАНБАЕВ, А. Ш. ШАЛДАНБАЕВ, И. О. ОРАЗОВ

М. О. Әуезов атындағы Оңтүстік Қазақстан мемлекеттік университеті, Шымкент, Қазақстан Республикасы)

ВОЛТЕРЛІ ШТУРМ-ЛИУВИЛЛ ОПЕРАТОРЫНЫҢ КРЕЙН КЕҢІСТІГІНДЕГІ

СПЕКТРАЛДЫ ТАРАЛЫМЫ

Бұл еңбекте вөлтерлі Штурм-Лиувилл операторының Крейн кеңістігіндегі спектралды таралымы алынды.

Тірек сөздер: спектр, таралым, есеп, кеңістік, сан.

Summary

A. A. Shaldanbayev, A. Sh. Shaldanbayev, I. O. Orasov

SPECTRAL RESOLUTION OF THE STURM-LIOUVILLE OPERATOR

WITH THE VOLTERRA PROPERTY

In this paper we obtained a spectral resolution of the Sturm-Liouville operator with the Volterra property in the Krein space.

Keywords: spectrum, decomposition, task, space, number.

Поступила 02.09.2013 г.